ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES D'ALGER

Module : Statistique de gestion
Niveau : 1ère Année Master
Année académique : 2012/2013

HEC ALGER
Entreprendre et Innover

Semestre : 1
Date : 24/02/2013
Durée : 2 heures

CORRIGÉ TYPE DE L'EXAMEN

Etude de cas : Découpage des planches

PARTIE (A) :

a. L'importance de la théorie de l'échantillonnage et de l'inférence statistique :

L'étude de propriétés et de caractéristiques d'un ensemble, quand on ne dispose pas encore de données, nécessite d'examiner, d'observer des éléments de cet ensemble. La manière de recueillir ces données fait l'objet d'une théorie mathématique appelée théorie des sondages ou encore théorie de l'échantillonnage, Cette théorie concerne l'optimisation de la collecte des données selon divers critères et répond à certaines interrogations sur la façon de procéder à cette collecte en rapport avec l'information disponible et l'effort d'échantillonnage consenti.

0,5 Point

La théorie d'échantillonnage ***permet de déterminer les valeurs des paramètres da la population*** à partir des paramètres d'un sous-ensemble de cette population. La théorie d'échantillonnage ***joue un rôle important et crucial*** dans les études économiques, commerciales et en gestion.

0,5 Point

b. Les méthodes d'échantillonnage :

0,25 Point

On distingue principalement entre deux types de méthodes, ***les méthodes probabilistes (aléatoires)*** et ***les méthodes non probabilistes (raisonnées)***.

0,25 Point

L'échantillonnage probabiliste repose sur un choix d'unités dans la population fait au hasard, ce n'est pas l'enquêteur qui choisit les unités, c'est la méthode utilisée pour la sélection qui le fait. Une des caractéristiques de cette méthode est que chaque unité de la population a une probabilité mesurable d'être choisie. ***Parmi ces méthodes on trouve la méthode aléatoire simple, la méthode aléatoire stratifié et la méthode aléatoire en grappes***.

0,25 Point

L'échantillonnage non probabiliste repose sur un choix arbitraire des unités, c'est l'enquêteur qui choisit les unités et non le hasard. En ce sens, il serait donc aventureux de généraliser les résultats obtenus pour l'échantillon à toute la population. Malgré cela, ces méthodes sont souvent utilisées dans certaines disciplines. ***Parmi ces méthodes on trouve la méthode par quota, la méthode de convenance et la méthode de jugement***.

0,25 Point

c. La méthode d'échantillonnage utilisée dans ce cas :

0,5 Point

La méthode d'échantillonnage utilisée dans ce cas est ***la méthode aléatoire simple***, aléatoire ***parce que le tirage est fait au hasard***, c-à-d que l'échantillonnage n'est pas raisonné (probabiliste), et simple ***parce qu'on n'a pas segmenté la population*** donc c'est la méthode aléatoire **simple** (n'est pas la méthode stratifié ou en grappes).

0,25 Point

0,25 Point

d. Exhaustivité de tirage :

Le tirage dans ce cas est ***non exhaustif***, ***parce que le tirage est fait avec remise***.

0,5 Point

0,5 Point

e. Définition du terme "Estimation" :

L'estimation est le procédé par lequel on détermine les valeurs inconnues des paramètres de la population à partir des données de l'échantillon.

1 Point

PARTIE (B) :

1. Détermination de la moyenne, la variance et l'écart-type de l'échantillon :

Longueur	Centre de classe (x_i)	Effectifs (n_i)	$n_i x_i$	$(x_i)^2$	$n_i(x_i)^2$
[189 - 191 [	190	1	190	36100	36100
[191 - 193 [	192	3	576	36864	110592
[193 - 195 [	194	7	1358	37636	263452
[195 - 197 [	196	9	1764	38416	345744
[197 - 199 [	198	4	792	39204	156816
[199 - 201 [	200	1	200	40000	40000
Somme	**-**	**25**	**4880**	**228220**	**952704**

0,5 Point

$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{4880}{25} = 195,2$ 0,5 Point

$$s^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i (x_i)^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{952704}{25} - (195,2)^2 = 38108,16 - 38103,04 = 5,12$$

0,5 Point

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5,12} = 2,26$ 0,5 Point

2. Proposition d'une estimation ponctuelle pour la moyenne et l'écart-type :

$\mu = \bar{x} = 195,2$ 0,5 Point

$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{25}{24}(5,12) = 5,33$ 1 Point

$\sigma = \sqrt{5,33} = 2,31$ 0,5 Point

3. Détermination de la loi et l'intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne :

3.a. Coefficient de confiance 95 % :

La loi de probabilité suivie par la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$ est **la loi de t student**, parce que la population est gaussienne (suit la loi normale) et la taille de l'échantillon inférieur à **30** (petit échantillon) et sigma inconnu. 0,5 Point

$\alpha = 0,05$

$t_{\alpha/2} = t(ddl, \alpha/2) = t(n-1, \alpha/2) = t(24, \quad 0,025) = 2,064$ 0,25 Point

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,31}{\sqrt{25}} \approx 0,46$ 0,25 Point

Ou bien par la formule : $\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{2,26}{\sqrt{24}} \approx 0,46$

La marge d'erreur : $t_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} = 2,064(0,46) \approx 0,95$ 0,25 Point

Donc :

$\mu \in \left[\bar{x} - t_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} , \bar{x} + t_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}\right]$ 0,25 Point

$\mu \in [195,2 - 0,95 ; 195,2 + 0,95]$ 0,25 Point

$\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{194,25; 196,15}]$ 0,25 Point

3.b. Coefficient de confiance 90 % :

$\alpha = 0{,}1$

$t_{\alpha/2} = t(ddl, \alpha/2) = t(n-1, \alpha/2) = t(24,\ 0{,}05) = 1{,}711$ 0,25 Point

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}31}{\sqrt{25}} \approx 0{,}46$$

Ou bien par la formule : $\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{2{,}26}{\sqrt{24}} \approx 0{,}46$

La marge d'erreur : $t_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} = 1{,}711(0{,}46) \approx 0{,}78$ 0,25 Point

Donc :

$\mu \in \left[\bar{x} - t_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}\ , \bar{x} + t_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}\right]$ 0,25 Point

$\mu \in [195{,}2 - 0{,}78\ ; 195{,}2 + 0{,}78]$ 0,25 Point

$\boldsymbol{\mu \in [194{,}42; 195{,}98]}$

4. Détermination de la loi et l'intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne :

La loi de probabilité suivie par la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$ dans ce cas ***rapproche** à la loi normale*, parce que la population est quelconque et la taille de l'échantillon supérieur à **30** (grand échantillon) et sigma inconnu. 0,5 Point

$\alpha = 0{,}05$

$\varepsilon_\alpha = 1{,}960$ 0,25 Point

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}31}{\sqrt{100}} \approx 0{,}23$$ 0,25 Point

Ou bien par la formule : $\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{2{,}26}{\sqrt{99}} \approx 0{,}23$

La marge d'erreur : $\varepsilon_\alpha\sigma_{\bar{X}} = 1{,}960(0{,}23) \approx 0{,}45$ 0,25 Point

Donc :

$\mu \in [\bar{x} - \varepsilon_\alpha\sigma_{\bar{X}}\ , \bar{x} + \varepsilon_\alpha\sigma_{\bar{X}}]$ 0,25 Point

$\mu \in [195{,}2 - 0{,}45\ ; 195{,}2 + 0{,}45]$ 0,25 Point

$\boldsymbol{\mu \in [194{,}75; 195{,}65]}$ 0,25 Point

5. La taille minimale de l'échantillon au niveau de confiance de 99 % :

$\varepsilon_\alpha \sigma_{\bar{X}} = \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}25$ 0,25 Point

Pour un coefficient de confiance de **99 %** la valeur critique $\boldsymbol{\varepsilon_\alpha = 2,576}$ 0,25 Point

$\boldsymbol{\sigma}$ est inconnu dans ce cas, donc on va utiliser l'estimation ponctuelle :

On note "$\boldsymbol{me}$" pour la marge d'erreur : $me = 0{,}25$

$me = \varepsilon_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{\varepsilon_\alpha \sigma}{me}\right)^2$ 0,5 Point

$n = \left(\frac{\varepsilon_\alpha \sigma}{me}\right)^2 = \left(\frac{(2{,}576)(2{,}31)}{0{,}25}\right)^2 \approx 566$ 0,5 Point

$\boldsymbol{n \approx 566}$ 0,5 Point

6. Commentaire et justification :

On observe que l'amplitude de l'intervalle de confiance augmente avec le coefficient de confiance. L'augmentation du niveau de confiance entraine l'augmentation de la largeur de l'intervalle de confiance. 0,5 Point

De manière générale en statistique, l'obtention d'une assurance (ou confiance) plus grande se fait au détriment de la précision, d'où l'arbitrage classique entre niveau de confiance et précision. En effet, une assurance plus élevée s'obtient généralement par l'inclusion de plus d'évènements, ce qui nuit à la précision du résultat. La précision dans le cas de l'estimation par intervalle de confiance étant inversement liée à la largeur de l'intervalle de confiance, on s'attend donc naturellement à ce qu'un niveau de confiance plus élevé donne lieu à un intervalle de confiance plus large. 0,25 Point

On ce qui concerne la taille de l'échantillon, on remarque que l'augmentation de cette dernière pour le même niveau de confiance implique la diminution de la largeur de l'intervalle de confiance ce qui donne plus de précision. 0,25 Point

7. Estimation ponctuelle de la proportion :

$\boldsymbol{\pi = p = 22\ \% = 0,22}$ 1 Point

8. Estimation de la proportion par intervalle de confiance :

La loi de probabilité suivie par la distribution d'échantillonnage de la proportion de $\boldsymbol{p}$ est ***la loi normale***.

0,5 Point

On sait que : $\boldsymbol{\pi} \in \left[\boldsymbol{p} - \boldsymbol{\varepsilon_{\alpha}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{n}}}\ ,\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\varepsilon_{\alpha}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{n}}}\right]$

0,25 Point

Le coefficient de confiance est **92 %** c.-à-d. que le seuil de risque est **8 %**

$\alpha = 0{,}08$

$\phi(\varepsilon_{\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\phi(\varepsilon_{\alpha}) = 1 - \frac{0{,}08}{2} = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

$\varepsilon_{\alpha} = 1{,}75$

0,5 Point

$\pi \in \left[0{,}22 - 1{,}75\sqrt{\frac{(0{,}22)(0{,}78)}{100}}\ ;\ 0{,}22 + 1{,}75\sqrt{\frac{(0{,}22)(0{,}78)}{100}}\right]$

0,25 Point

$\pi \in [0{,}22 - (1{,}75)(0{,}04);\ \ 0{,}22 + (1{,}75)(0{,}04)]$

$\pi \in [0{,}22 - 0{,}07;\ \ 0{,}22 + 0{,}07]$

0,25 Point

$\boldsymbol{\pi} \in [\mathbf{0,15};\ \ \mathbf{0,29}]$

0,25 Point