ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES D'ALGER

Module : Statistique de Gestion
Niveau : 1ère année Master (TC)
Année Académique : 2013/2014

HEC ALGER
Entreprendre et Innover

Semestre : 1
Groupes : 1 et 2
Durée : 1h30

CORRIGE TYPE DU TEST N° 02

Etude de cas : Machine automatique

1. Calcul de la moyenne, l'écart-type biaisé et l'écart-type non biaisé :

0,5 Point

Masse (en grammes)	Centre de classe (x_i)	Effectifs (n_i)	$n_i x_i$	$(x_i)^2$	$n_i(x_i)^2$
[215 - 225 [	220	7	1540	48400	338800
[225 - 235 [	230	11	2530	52900	581900
[235 - 245 [	240	19	4560	57600	1094400
[245 - 255 [	250	26	6500	62500	1625000
[255 - 265 [	260	18	4680	67600	1216800
[265 - 275 [	270	13	3510	72900	947700
[275 - 285 [	280	6	1680	78400	470400
Somme	**1750**	**100**	**25000**	**440300**	**6275000**

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{25000}{100} = 250$$

0,5 Point

$$s^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i (x_i)^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{6275000}{100} - (250)^2 = 62750 - 62500 = 250$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{250} = 15{,}81$$

1 Point

$$\grave{s}^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum n_i (x_i)^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2 = \frac{6275000}{99} - \frac{100}{99}(250)^2$$

$$= 63383{,}83 - 63131{,}31 = 252{,}52$$

$$\grave{s} = \sqrt{\grave{s}^2} = \sqrt{252{,}52} = 15{,}89$$

1 Point

2. Proposition d'une estimation ponctuelle pour la moyenne et l'écart-type :

$\mu = \bar{x} = 250$ 1,5 Point

$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s = \sqrt{\frac{100}{99}}(15{,}81) = 15{,}89 = \grave{s}$ 1,5 Point

3. Détermination d'un intervalle de confiance pour la moyenne à 5 % de risque :

$Z\alpha_{/2} = 1{,}960$ 0,5 Point

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{\grave{s}}{\sqrt{n}} = \frac{15{,}89}{\sqrt{100}} \approx 1{,}59$ 0,5 Point

La marge d'erreur : $Z\alpha_{/2}\sigma_{\bar{X}} = 1{,}960(1{,}59) \approx 3{,}12$ 0,5 Point

Donc :

$\mu \in \left[\bar{x} - Z\alpha_{/2}\sigma_{\bar{X}}\,, \bar{x} + Z\alpha_{/2}\sigma_{\bar{X}}\right]$ 0,5 Point

$\mu \in [250 - 3{,}12; 250 + 3{,}12]$ 0,5 Point

$\boldsymbol{\mu \in [246{,}88; 253{,}12]}$ 0,5 Point

4. La démonstration :

$$P\left(-Z\alpha_{/2} < Z < Z\alpha_{/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(Z < Z\alpha_{/2}\right) - P\left(Z < -Z\alpha_{/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(Z < Z\alpha_{/2}\right) - \left[1 - P\left(Z < -Z\alpha_{/2}\right)\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left(Z < Z\alpha_{/2}\right) - 1 + P\left(Z < -Z\alpha_{/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$2\left[P\left(Z < Z\alpha_{/2}\right)\right] - 1 = 1 - \alpha$$

$$2\left[P\left(Z < Z\alpha_{/2}\right)\right] = 2 - \alpha$$

$$P\left(Z < Z\alpha_{/2}\right) = \frac{2 - \alpha}{2}$$

$$\pi\left(Z\alpha_{/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

2 Points

5. Détermination d'un intervalle de confiance à 75,4 % :

Premièrement on va déterminer la valeur critique $Z\alpha/_2$ pour un coefficient de confiance de **75,4 %**

$$\pi\left(Z\alpha/_2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,246}{2} = 1 - 0,123 = 0,877$$

0,5 Point

Après la lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on trouve que la valeur critique $Z\alpha/_2$ pour un coefficient de confiance de 75,4 % égale à :

$$Z\alpha/_2 = \mathbf{1,16}$$

0,5 Point

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{\grave{s}}{\sqrt{n}} = \frac{15,89}{\sqrt{100}} \approx 1,59$$

0,5 Point

La marge d'erreur : $Z\alpha/_2 \sigma_{\bar{X}} = 1,16(1,59) \approx 1,84$

0,5 Point

Donc :

$$\mu \in \left[\bar{x} - Z\alpha/_2 \sigma_{\bar{X}}, \bar{x} + Z\alpha/_2 \sigma_{\bar{X}}\right]$$

0,25 Point

$$\mu \in [250 - 1,84; 250 + 1,84]$$

0,25 Point

$$\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{248,16}; \mathbf{251,84}]$$

0,5 Point

6. Détermination d'un intervalle de confiance à 99 % :

$$Z\alpha/_2 = 2,576$$

0,5 Point

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{\grave{s}}{\sqrt{n}} = \frac{15,89}{\sqrt{100}} \approx 1,59$$

0,25 Point

La marge d'erreur : $Z\alpha/_2 \sigma_{\bar{X}} = 2,576(1,59) \approx 4,09$

0,25 Point

Donc :

$$\mu \in \left[\bar{x} - Z\alpha/_2 \sigma_{\bar{X}}, \bar{x} + Z\alpha/_2 \sigma_{\bar{X}}\right]$$

0,25 Point

$$\mu \in [250 - 4,09; 250 + 4,09]$$

0,25 Point

$$\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{245,91}; \mathbf{254,09}]$$

0,5 Point

7. La longueur des intervalles de confiance :

Intervalle 1 (75,4 %) : la longueur = **3,68** — 0,25 Point

Intervalle 1 (95 %) : la longueur = **6,24** — 0,25 Point

Intervalle 1 (99 %) : la longueur = **8,18** — 0,25 Point

On observe que l'amplitude de l'intervalle de confiance augmente avec le coefficient de confiance, c'est-à-dire que l'augmentation du niveau de confiance entraine l'augmentation de la largeur de l'intervalle de confiance.

En effet, une assurance plus élevée s'obtient généralement par l'inclusion de plus d'évènements, ce qui nuit à la précision du résultat. La précision dans le cas de l'estimation par intervalle de confiance étant inversement liée à la largeur de l'intervalle de confiance, on s'attend donc naturellement à ce qu'un niveau de confiance plus élevé donne lieu à un intervalle de confiance plus large. 1,25 Point

8. La taille minimale de l'échantillon :

$$Z\alpha_{/2}\sigma_{\bar{X}} = Z\alpha_{/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Z\alpha_{/2}\frac{\grave{s}}{\sqrt{n}} = Z\alpha_{/2}\frac{s}{\sqrt{n-1}} = 2$$ 0,5 Point

$\boldsymbol{\sigma}$ est inconnu dans ce cas, donc on va utiliser l'estimation ponctuelle $\boldsymbol{\grave{s}}$:

On note $\boldsymbol{me}$ pour la marge d'erreur

$me = 2$

$$me = Z\alpha_{/2}\frac{\grave{s}}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{Z\alpha_{/2}\grave{s}}{me}\right)^2$$ 0,5 Point

$$n = \left(\frac{Z\alpha_{/2}\grave{s}}{me}\right)^2 = \left(\frac{(1{,}96)(15{,}89)}{2}\right)^2 \approx 242$$ 0,5 Point

$\boldsymbol{n \approx 242}$ 0,5 Point