ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES D'ALGER

Module : Statistique de Gestion
Niveau : 1ère année Master (TC)
Année Académique : 2013/2014

HEC ALGER
Entreprendre et Innover

Semestre : 1
Groupes : 7 et 8
Durée : 1h30

CORRIGE TYPE DU TEST N° 02

Etude de cas : Découpage des planches

1. Calcul de la moyenne, l'écart-type biaisé et l'écart-type non biaisé :

Longueur	Centre de classe (x_i)	Effectifs (n_i)	$n_i x_i$	$(x_i)^2$	$n_i(x_i)^2$
[189 - 191 [	190	2	380	36100	72200
[191 - 193 [	192	8	1536	36864	294912
[193 - 195 [	194	32	6208	37636	1204352
[195 - 197 [	196	38	7448	38416	1459808
[197 - 199 [	198	14	2772	39204	548856
[199 - 201 [	200	6	1200	40000	240000
Somme	**-**	**100**	**19544**	**228220**	**3820128**

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{19544}{100} = 195{,}44$$

$$s^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i (x_i)^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{3820128}{100} - (195{,}44)^2$$
$$= 38201{,}28 - 38196{,}79 = 4{,}49$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}49} = 2{,}12$$

2. Proposition d'une estimation ponctuelle pour la moyenne et l'écart-type :

$$\mu = \bar{x} = 195{,}44$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{100}{99}(4{,}49) = 4{,}54$$

$$\sigma = \sqrt{4{,}54} = 2{,}13$$

3. Détermination d'un intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne :

$Z_{\alpha/2} = 1{,}960$

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}13}{\sqrt{100}} \approx 0{,}21$

Ou bien par la formule : $\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{2{,}12}{\sqrt{99}} \approx 0{,}21$

La marge d'erreur : $Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} = 1{,}960(0{,}21) \approx 0{,}41$

Donc :

$\mu \in \left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}\ , \bar{x} + Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}\right]$

$\mu \in [195{,}44 - 0{,}41; 195{,}44 + 0{,}41]$

$\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{195{,}03}; \mathbf{195{,}85}]$

4. La démonstration :

$P\left(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

$P\left(Z < Z_{\alpha/2}\right) - P\left(Z < -Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

$P\left(Z < Z_{\alpha/2}\right) - \left[1 - P\left(Z < -Z_{\alpha/2}\right)\right] = 1 - \alpha$

$P\left(Z < Z_{\alpha/2}\right) - 1 + P\left(Z < -Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

$2\left[P\left(Z < Z_{\alpha/2}\right)\right] - 1 = 1 - \alpha$

$2\left[P\left(Z < Z_{\alpha/2}\right)\right] = 2 - \alpha$

$P\left(Z < Z_{\alpha/2}\right) = \frac{2 - \alpha}{2}$

$\pi\left(Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

5. Détermination d'un intervalle de confiance à 97 % :

Premièrement on va déterminer la valeur critique $\boldsymbol{\varepsilon_\alpha}$ pour un coefficient de confiance 97%
$\pi\left(Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,03}{2} = 1 - 0,015 = 0,985$
Après la lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on trouve que la valeur critique $\boldsymbol{\varepsilon_\alpha}$ pour un coefficient de confiance de 97 % égale à :
$\boldsymbol{Z_{\alpha/2} = 2,17}$

$\sigma_{\bar{X}} \approx 0,21$
La marge d'erreur : $Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} = 2,17(0,21) \approx 0,46$

Donc :

$\mu \in \left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} , \bar{x} + Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}\right]$

$\mu \in [195,44 - 0,46; 195,44 + 0,46]$

$\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{194,98}; \mathbf{195,9}]$

6. Détermination d'un intervalle de confiance à 99 % :

$Z_{\alpha/2} = 2,576$
$\sigma_{\bar{X}} \approx 0,21$
La marge d'erreur : $Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} = 2,576(0,21) \approx 0,54$
Donc :
$\mu \in \left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} , \bar{x} + Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}\right]$
$\mu \in [195,44 - 0,54; 195,44 + 0,54]$
$\boldsymbol{\mu} \in [\mathbf{194,90} ; \mathbf{195,98}]$

7. La taille minimale de l'échantillon :

$$Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,25$$

$\boldsymbol{\sigma}$ est inconnu dans ce cas, donc on va utiliser l'estimation ponctuelle :

On note $\boldsymbol{me}$ pour la marge d'erreur

$me = 0,25$

$$me = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{me}\right)^2$$

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{me}\right)^2 = \left(\frac{(1,96)(2,13)}{0,25}\right)^2 \approx 278$$

$$\boldsymbol{n \approx 278}$$

8. Commentaire et justification :

On observe que l'amplitude de l'intervalle de confiance augmente avec le coefficient de confiance. L'augmentation du niveau de confiance entraine l'augmentation de la largeur de l'intervalle de confiance.

De manière générale en statistique, l'obtention d'une assurance (ou confiance) plus grande se fait au détriment de la précision, d'où l'arbitrage classique entre niveau de confiance et précision. En effet, une assurance plus élevée s'obtient généralement par l'inclusion de plus d'évènements, ce qui nuit à la précision du résultat. La précision dans le cas de l'estimation par intervalle de confiance étant inversement liée à la largeur de l'intervalle de confiance, on s'attend donc naturellement à ce qu'un niveau de confiance plus élevé donne lieu à un intervalle de confiance plus large.