Module : Statistique de Gestion
Cycle : 1ère année Master (TC)
Année Académique : 2013/2014

Semestre : 1
Date : 16/02/2014
Durée : 1h30

CORRIGÉ TYPE DE L'EXAMEN

EXERCICE 1 (16 points)

[1 point]

1. La loi de probabilité suivie par la distribution d'échantillonnage est la **loi normale**, car la population suit la loi normale et n = 49 avec (σ connu).
2. Calcule de $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}}}$ et $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}}$ et les probabilités.
   - $\mu_{\bar{X}} = \mu = 12{,}8.$ [1 point]
   - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}1}{\sqrt{49}} = \frac{2{,}1}{7} = 0{,}3.$ [1 point]
   - $P(13 < \bar{X} < 14) = P\left(\frac{13-12{,}8}{0{,}3} < \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{14-12{,}8}{0{,}3}\right) = P(0{,}67 < Z < 4) = P(Z < 4) - P(Z < 0{,}67) = \pi(4) - \pi(0{,}67) = 0{,}9999 - 0{,}7486 = \mathbf{0{,}2513}$ [1 point]
   - $P(\bar{X} < 13) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{13-12{,}8}{0{,}3}\right) = P(Z < 0{,}67) = \pi(0{,}67) = \mathbf{0{,}7486}$ [1 point]

3. Détermination des intervalles de confiance et le commentaire**.**
   - Seuil de risque **5 %** :

n= 49
$\bar{x} = 12{,}8$
$\bar{X} \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{49}}).$
$\bar{X} \rightarrow \mathcal{N}(12{,}8\,;0{,}3).$
α = 5%   1- α = 95%
$Z\alpha_{/2} = 1{,}960$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}1}{\sqrt{49}} = 0{,}3$$ [2 Points]

La marge d'erreur : $Z\alpha_{/2}\sigma_{\bar{X}} = 1{,}960(0{,}3) \approx 0{,}59$

Donc :

$\mu \in \left[\bar{x} - Z\alpha_{/2}\sigma_{\bar{X}}\,, \bar{x} + Z\alpha_{/2}\sigma_{\bar{X}}\right]$
$\mu \in [12{,}8 - 0{,}59; 12{,}8 + 0{,}59]$
$\mu \in [12{,}21; 13{,}39]$

- Niveau de confiance **99 %** :

  α = 1%   1- α = 99%

  $Z\alpha/_2 = 2{,}576$

  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}1}{\sqrt{49}} = 0{,}3$ [2 Points]

  La marge d'erreur : $Z\alpha/_2\sigma_{\bar{X}} = 0{,}3(2{,}576) \approx 0{,}77$

  Donc :

  $\mu \in \left[\bar{x} - Z\alpha/_2\sigma_{\bar{X}}\,, \bar{x} + Z\alpha/_2\sigma_{\bar{X}}\right]$

  $\mu \in [12{,}8 - 0{,}77; 12{,}8 + 0{,}77]$

  $\boldsymbol{\mu \in [12{,}03; 13{,}57]}$

- Commentaire :

  On observe que l'amplitude de l'intervalle de confiance augmente avec le niveau de confiance. [1 point]

4. La taille minimale :

1- **α** = 95%   **α**= 5%

$Z\alpha/_2\sigma_{\bar{X}} = Z\alpha/_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}4$

On note $\boldsymbol{me}$ pour la marge d'erreur

$me = 0{,}4$

$me = Z\alpha/_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{Z\alpha/_2\sigma}{me}\right)^2$ [2 Points]

α = 5%   1- α = 95%

$Z\alpha/_2 = 1{,}960$

$n = \left(\frac{Z\alpha/_2\sigma}{me}\right)^2 = \left(\frac{(1{,}960)(2{,}1)}{0{,}4}\right)^2 \approx 106$

$\boldsymbol{n \approx 106}$

5. L'estimation de la proportion :

- $\boldsymbol{\pi = p = 0{,}03}$.
- La loi de probabilité suivie par la distribution d'échantillonnage de la proportion est la loi normale $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{P}, \sqrt{\frac{\boldsymbol{P(1-P)}}{\boldsymbol{n}}})$ [2 Points]

- L'intervalle de confiance à un niveau de **95,44 %** :

Premièrement on va déterminer la valeur critique $Z\alpha_{/2}$ pour un coefficient de confiance de **95,44 %**

$$\pi\left(Z\alpha_{/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,0456}{2} = 1 - 0,0228 = 0,9772$$

Après la lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on trouve que la valeur critique $Z\alpha_{/2}$ pour un coefficient de confiance de 95,44 % égale à :

$\boldsymbol{Z\alpha_{/2} = 2}$ [2 Points]

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,03 \times 0,97}{49}} = \sqrt{\frac{0,0291}{49}} \approx 0,02$$

Donc : $\pi \in \left[p - Z\alpha_{/2}\sigma_p\ , p + Z\alpha_{/2}\sigma_p\right]$

$$\pi \in [0,03 - 2(0,02), 0,03 + 2(0,02)]$$

$$\pi \in [0,03 - 0,04; 0,03 + 0,04]$$

$\boldsymbol{\pi} \in [\mathbf{-0,01}\ ;\mathbf{0,07}]$ mais on sait que la proportion est une probabilité, donc la proportion est une valeur comprise entre le zéro et le un, c-à-d que l'intervalle de confiance de la proportion de la population dans ce cas est : $\boldsymbol{\pi} \in [\mathbf{0}\ ;\mathbf{0,07}]$

<u>**EXERCICE 2**</u> (4 points)

a. $(X_i - \bar{X})^2 = [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2 = (X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2$. D'où :

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum (X_i - \mu) + n\,(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\left[\sum X_i - n\mu\right] + n(\bar{X} - \mu)^2$$

[2 Points]

$$= \sum (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)n\left[\frac{1}{n}\sum X_i - \mu\right] + n(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum (X_i - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)[\bar{X} - \mu] + n(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum (X_i - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$$

$= \sum (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2$. D'où:

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}\sum E\,(X_i - \mu)^2 - E(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum V(X_i) - V(\bar{X})$$

Or, $\forall i,\ \sigma_i^2 = \sigma^2$, car les (X_i) sont indépendantes, et $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$; donc :

$$E(S^2) = E(S^2) = \frac{1}{n}\sum \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n}(n\sigma^2) - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$E(S^2) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

Ainsi :$E(S^2) \neq \sigma^2$, et donc S^2 est un estimateur biaisé de σ^2.

b. $E(S^2) = \frac{n\sigma^2 - \sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

$\Rightarrow E\left[\frac{n}{n-1}S^2\right] = \frac{n}{n-1}E(S^2) = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$ [2 Points]

$$\Rightarrow \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = S'^2$$

Donc : $E(S'^2) = \sigma^2$